

Dualité

Rafaël Lopez

LRI

Plan

- Rappels sur les inéquations
- Comment borner la valeur optimale d'un PL ?
- Programme dual
- Théorèmes
- Règles de transformation

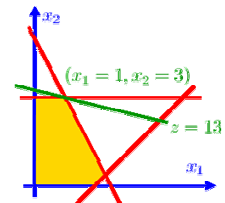
Rappels sur les inéquations

- Toute combinaison conique (c.-à-d. à coefficients non négatifs) d'inéquations du même type fournit une inéquation valide.
- Toute combinaison linéaire d'équations fournit une équation valide.
- On peut combiner des inéquations et des équations pour obtenir une inéquation valide.

Comment borner la valeur optimale d'un PL ?

- Soit le problème

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x_1 + 4x_2 \\ \text{sc} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Comment borner la valeur optimale d'un PL ?

Considérons l'inéquation valide obtenue en multipliant par 4 la deuxième contrainte.

$$8x_1 + 4x_2 \leq 20$$

Pour tout couple de valeurs (x_1, x_2) non négatives on a :

$$x_1 + 4x_2 \leq 8x_1 + 4x_2$$

Et pour toute solution admissible du PL on a donc

$$z = x_1 + 4x_2 \leq 8x_1 + 4x_2 \leq 20.$$

En particulier, pour la solution optimale du PL, on a $z \leq 20$.

Peut-on faire mieux ?

L'inéquation valide obtenue en additionnant la première contrainte et 5 fois la troisième est

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 2 \quad \times 1 \\ \underline{x_2 \leq 3 \quad \times 5} & & \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 17 \end{array}$$

Ainsi, pour toute solution admissible du PL, on a

$$z = x_1 + 4x_2 \leq 17$$

Et, en particulier, $z \leq 17$.

Peut-on faire encore mieux ?

En additionnant 1/2 fois la deuxième contrainte et 7/2 fois la troisième, on obtient

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \quad \times 1/2 \\ x_2 & \leq & 3 \quad \times 7/2 \\ \hline x_1 + 4x_2 & \leq & 13 \end{array}$$

Et, pour toute solution admissible du PL, on a $z = x_1 + 4x_2 \leq 13$.

La solution admissible $x_1 = 1, x_2 = 3$ ayant valeur 13, l'inéquation valide précédente fournit un certificat d'optimalité de cette solution.

Programme dual d'un PL canonique

- A tout PL canonique

$$\text{Max } z = cx$$

$$\text{s.c. } Ax \leq b \quad \text{Problème primal (PLP)} \\ x \geq 0$$

- on associe un programme dual

$$\text{Min } w = yb$$

$$\text{s.c. } yA \leq c \quad \text{Problème dual (PLD)} \\ y \geq 0$$

Exemple

Le problème dual du programme

$$\text{Max } z = x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c. } x_1 - x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

est

Théorème de dualité faible

- Soit x une solution admissible d'un PL canonique et y une solution admissible de son dual, alors

$$cx \leq yb$$

- Preuve. On a d'une part

$$cx \leq (yA)x \quad \text{car } cx \leq yb \quad \text{et } yb \leq yA$$

et d'autre part

$$y(Ax) \leq yb \quad \text{car } yA \leq c \quad \text{et } Ax \leq b$$

- Corollaire. Soit x une solution admissible de (PLP) de valeur z et y une solution admissible de (PLD) de valeur w . Si $z = w$ alors les solutions x et y sont optimales pour leur problème respectif.

Théorème de dualité forte

- Théorème de dualité forte Si un des deux problèmes primal ou dual possède une solution optimale avec valeur finie, alors la même chose est vraie pour l'autre problème, et les valeurs optimales des deux problèmes sont égales. Si un des deux problèmes n'est pas borné, alors le domaine réalisable de l'autre problème est vide.

Règles de dualisation

Problème de maximisation	↔	Problème de minimisation
Variable $x_j \geq 0$	↔	j^{e} contrainte de type $\geq$
Variable $x_j \in \mathbb{R}$	↔	j^{e} contrainte de type $=$
Variable $x_j \leq 0$	↔	j^{e} contrainte de type $\leq$
i^{e} contrainte de type $\leq$	↔	Variable $y_i \geq 0$
i^{e} contrainte de type $=$	↔	Variable $y_i \in \mathbb{R}$
i^{e} contrainte de type $\geq$	↔	Variable $y_i \leq 0$

Récapitulatif

- Le sens d'optimisation est toujours inversé entre un PL et son dual.
- Si un PL a n variables et m contraintes, son dual a m variables et n contraintes.
- Chaque variable du dual correspond à une contrainte du problème de départ, et réciproquement, chaque contrainte du dual est associée à une variable du problème de départ.
- La dualisation est une opération involutive (le dual du dual est le problème de départ).