Recherche Opérationnelle: Rappels de Programmation Linéaire

Rafaël Lopez

LRI

Programmation Linéaire

- Qu'est-ce qu'un programme linéaire
- Exemple
- Hypothèses
- Intérêt pratique
- Interprétation géométrique et résolution graphique
- Résultat
- Les différentes formes d'un programme linéaire

Qu'est qu'un programme linéaire ?

- Un programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

- A l'origine , le terme programme a le sens de planification opérationnelle mais il est aujourd'hui employé comme synonyme de problème (d'optimisation).

- La terminologie est due à G. B. Dantzig, inventeur de l'algorithme du simplexe.

Écriture mathématique

$$\begin{aligned}
\text{Max (Min)} \quad z = & \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.c.} \quad & \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq b_k \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j = b_r
\end{aligned}$$

Terminologie

- Les variables $x_{1,} \ldots, x_n$ sont appelées variables de décision du problème
- La fonction linéaire à optimiser est appelée fonction objectif
- Les contraintes prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.
- Les contraintes de la forme

$$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad l_j, u_j \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

sont appelées des contraintes de borne. Elles se résument souvent à des contraintes de non-négativité, et sont généralement traitées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

Exemple: un problème d'allocation de ressources

- Une entreprise produit des câbles de cuivre de 5 et 10 mm de diamètre sur une seule ligne de production imposant les contraintes suivantes.
  - Le cuivre disponible permet de produire 21000 mètres de câble de 5 mm de diamètre par semaine
  - un mètre de câble de 10 mm de diamètre nécessite 4 fois plus de cuivre qu'un mètre de câble de 5 mm de diamètre
- De plus, ayant une bonne connaissance de la demande, la production hebdomadaire de câble de 5 mm est limitée à 15000 mètres et la production de câble de 10 mm ne doit pas dépasser les 40% de la production totale.
- Les câbles sont vendus respectivement 10 € et 40 € le mètre.

Que doit produire l'entreprise afin de maximiser son CA hebdomadaire?

- Définissons deux variables de décision:

- Le chiffre d'affaire associé à une production est

- Il ne faut pas dépasser les capacités de production

- et satisfaire les contraintes de demande

- Finalement, on ne peut pas produire de quantités négatives

Problèmes d'allocation de ressources: modèle

- Pour déterminer le chiffre d'affaire de la vente, il faut déterminer les valeurs x_1 et x_2 solution du programme linéaire

Les hypothèses de la programmation linéaire

1. La linéarité des contraintes de la fonction objectif.
   - L'additivité des effets.
   - La proportionnalité des gains/coûts et des consommations de ressources.

2. La divisibilité des variables.

3. La détermination des données.

4. Lors de la modélisation d'un problème réel, l'impact de ces hypothèses sur la validité du modèle mathématique doit être étudié. Cette analyse peut mener à choisir un modèle différent (non linéaire, stochastique,...) et est essentielle pour la phase d'interprétation des résultats fournis par le modèle.

Intérêt pratique de la programmation linéaire

- Malgré les hypothèses sous-jacentes assez restrictives, de nombreux problèmes peuvent être modélisés par des programmes linéaires. Ces problèmes apparaissent dans des domaines aussi variés que
  - La gestion de production,
  - l'économie,
  - la distribution,
  - les télécommunications,
  - ...

- Il existe des algorithmes généraux (et des codes les mettant en oeuvre) permettant de résoudre efficacement des programmes linéaires (même lorsque le nombre de variables et de contraintes est important).

Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'intersection des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée domaine admissible, est
  et définit

Terminologie

- Une solution est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- une solution est admissible si
- La valeur d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le domaine admissible *D* d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La solution optimale d'un PL (si elle existe) est formée des valeurs optimales du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Résolution graphique dans le plan

- Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$.
- Il existe des solutions admissibles de valeur z si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible *D* du problème.
- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste *D*.
- Les points de contacts ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

Résultat d'une optimisation linéaire

- Le domaine admissible d'un PL peut être
  - vide. Dans un tel cas, le problème sans solution admissible (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
  - borné (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
  - non borné. Dans ce cas, selon la fonction objectif choisie,
    - Le problème peut posséder des solution optimales;
    - il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit non borné.

Les différentes formes d'un programme linéaire

- Formes canoniques et standard
- Pourquoi des formes particulières ?
- Règles de transformations

Forme générale d'un programme linéaire

Forme canonique d'un programme linéaire

-

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont de type "$\leq$"
- Toutes les variables sont non négatives

Forme standard d'un programme linéaire

-

- Problème de maximisation.
- Toutes les contraintes sont des équations.
- toutes les variables sont non négatives.

Forme canonique → forme standard

- On passe de la forme canonique à la forme standard en ajoutant dans chaque contrainte i une variable d'écart x_{n+i}.

Pourquoi des formes particulières ?

- Vérifier les prérequis des méthodes de résolution.
- Simplifier la présentation des algorithmes.

Cependant les définitions des formes canoniques et standard peuvent varier d'un auteur à un autre.

Règles de transformation

- Minimisation $\leftrightarrow$ maximisation
- Inéquation $\leq$ $\leftrightarrow$ Inéquation $\geq$
- Equation $\rightarrow$ inéquation $\leq$

Règles de transformation (suite)

- Inéquation → équation : on ajoute une variable d'écart
- Variable libre (réelle) → variable non négative : tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.
- Variable bornée inférieurement :

Règles de transformation (fin)

- Problème Min-Max (ou Max-Min) :

- Valeurs absolues :