

TP2 : Optimisation 1

1 Le problème du consommateur

On rappelle que le problème du consommateur est de maximiser son utilité $f(x_1, x_2)$ sous contrainte de revenus. On pose :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x_1, x_2) &= A * x_1^\alpha * x_2^\beta \end{aligned}$$

Et la contrainte de revenu est :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$$

Pour simplifier, on utilisera $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$

Le problème est donc

$$\begin{cases} \max_{x_1, x_2} & A * x_1^\alpha * x_2^\beta \\ \text{s.c.} & p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \end{cases}$$

2 Travail préalable

Cet exercice se fait sur feuille.

1. Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du 1^{er} ordre.
2. En déduire x_1^* et x_2^* à l'optimum en fonction de $R, \alpha, \beta, p_1, p_2$.
3. Que vaut alors $f(x_1^*, x_2^*)$?

3 Calcul de l'optimum

Cet exercice est sur Matlab

1. Posons $A = 2, \alpha = 0.5, \beta = 0.5, p_1 = 2, p_2 = 1$ et $R = 10$. Que valent x_1 et x_2 ?
2. Idem si $\alpha = 0.6$ et $\beta = 0.4$.
3. Ecrire une fonction `opti_conso.m` qui prend en entrée $(A, \alpha, \beta, p_1, p_2, R)$ et qui renvoie la valeur de x_1^* , x_2^* et $f(x_1^*, x_2^*)$ à l'optimum. La valeur de la fonction doit être le premier output.

4 Représentation graphique

4.1 Rappels

Il y a deux méthodes pour afficher des fonctions dans Matlab : soit on échantillonne sa fonction (i.e. on génère des valeurs), soit on passe à Matlab la fonction, et il essaye d'échantillonner. Pour les surfaces, les fonctions sont **surf** ou **mesh** si vous échantillonnez vous-même, et **ezsurf** ou **ezmesh** si Matlab doit faire l'échantillon.

Je vous recommande de faire vous-même l'échantillonnage pour ce TP.

Travail à faire :

1. Afficher une surface quelconque, par exemple $f(x, y) = x * y$.
2. Afficher un plan correspondant à $x = 5, y = [0, 5], z = [0, 5]$.
3. Le faire pivoter de 45 degrés, avec comme pivot la verticale passant par $x = 5, y = 0$.
4. Afficher un point avec comme marqueur une étoile en $x = 5/2, y = 5/2, z = 5$.

4.2 Application

1. Posons $A = 2, \alpha = 0.5, \beta = 0.5, p_1 = 2, p_2 = 1$ et $R = 10$. Afficher la surface ou la grille représentant cette fonction sur un intervalle judicieusement choisi.
2. Y rajouter une légende, nommer les axes.
3. Afficher maintenant le plan représentant la contrainte de revenu.
4. Afficher l'optimum à l'aide d'une étoile.

5 Embellissement et automatisation

Embellissement :

1. Afficher un plan représentant la contrainte de revenu est assez simple. Comment pouvez-vous n'afficher que la frontière de l'espace des solutions réalisables ?
2. Maintenant reprenez les questions de la section 4.2 en replaçant l'item 3 par la surface obtenue juste avant.

Automatisation : Ecrivez une fonction **consommateur.m** qui prend en entrée $(A, \alpha, \beta, p_1, p_2, R)$ et qui vous affiche l'espace (surface ou mesh à votre choix) des solutions réalisables, et fait apparaître l'optimum sous forme de petite sphère. Le graphique doit être judicieusement placé, les axes nommés, avec une étiquette (label) indiquant l'optimum, et une autre (titre) indiquant les paramètres du problème.

Pour avoir une idée de ce à quoi le résultat final peut ressembler, voir :

<http://www.lri.fr/~lopez/teachings/consommateur.png>