Partiel de PL (Correction)

Exercice 1

Question 1 (4 points)

On veut maximiser la surface découpée. Il y a deux contraintes due à la demande, et deux dues à la largeur des bobines. On écrit la fonction à maximiser :

$$\begin{aligned} z &= 20l_1x_1 + 30l_1x_2 + 20l_2x_3 + 30l_2x_4 \\ \Leftrightarrow z &= 60x_1 + 90x_2 + 100x_3 + 150x_4 \end{aligned}$$

Les contraintes dues à la largeur de la bobine sont

$$\begin{cases} l_1x_1 + l_2x_3 \leq 9 \\ l_1x_2 + l_2x_4 \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_3 \leq 9 \\ 3x_2 + 5x_4 \leq 7 \end{cases}$$

Les contraintes liées à la demande sont :

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \geq 40 \\ 20x_3 + 30x_4 \geq 20 \end{cases}$$

Ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 2x_3 + 3x_4 \geq 2 \end{cases}$$

Question 2 (2 points)

Considérons les contraintes de largeur :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 \leq 9 \\ 3x_2 + 5x_4 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_3 \leq 9 \\ 5x_4 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 < 2 \\ x_4 < 2 \end{cases}$$

Donc $x_3, x_4 \in \{0, 1\}$. De même,

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 \leq 9 \\ 3x_2 + 5x_4 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 \leq 9 \\ 3x_2 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_4 \leq 2 \end{cases}$$

Question 3 (2 points)

On peut décomposer les variables x_1 et x_2 en variables bivalentes[1] :

$$\begin{cases} x_1 = 2y_{11} + y_{12} \\ x_2 = 2y_{21} + y_{22} \end{cases} \qquad \text{avec } y_{11},\ y_{12},\ y_{21},\ y_{22} \in \{0, 1\}$$

[1] Il est préférable de décomposer $x_1 = 2y_{i1} + y_{i2}$ que $x_1 = y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}$ car dans le deuxième cas, il n'y a pas une solution unique, par exemple, $x_1 = 1$ peut être obtenu de trois façons différentes. Le meilleur moyen de s'assurer que la décomposition aura une solution unique est d'utiliser les puissances de 2 : $x = x_1 + 2x_2 + 4x_3 ... + 2^{k-1}x_k$

Le programme s'écrit alors :

$$\begin{cases} \max z = & 120y_{11} + 60y_{12} + 180y_{21} + 90y_{22} + 100x_3 + 150x_4 \\ \text{s.c.} & 6y_{11} + 3y_{12} + 5x_3 \leq 9 \\ & 6y_{21} + 3y_{22} + 5x_4 \leq 7 \\ & 4y_{11} + 2y_{12} + 4y_{21} + 2y_{22} \geq 4 \\ & 2x_3 + 3x_4 \geq 2 \\ & y_{11},\ y_{12},\ y_{21},\ y_{22},\ x_3,\ x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

On peut ensuite mettre toutes les contraintes dans le même sens.

$$\begin{cases} \max z = & 120y_{11} + 60y_{12} + 180y_{21} + 90y_{22} + 100x_3 + 150x_4 \\ \text{s.c.} & 6y_{11} + 3y_{12} + 5x_3 \leq 9 \\ & 6y_{21} + 3y_{22} + 5x_4 \leq 7 \\ & -4y_{11} - 2y_{12} - 4y_{21} - 2y_{22} \leq -4 \\ & -2x_3 - 3x_4 \leq -2 \\ & y_{11},\ y_{12},\ y_{21},\ y_{22},\ x_3,\ x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Exercice 2

Question 1 (3 points)

On développe l'expression et on la simplifie, pour obtenir :

$$-x_1^2 + 4x_2^2 + 12x_1x_2 + 11x_1 + 7x_2$$

Ensuite, on linéarise les termes quadratiques, c'est-à-dire x_1^2, x_2^2, x_1x_2, en réalisant la transformation $y_{i,j} = x_ix_j, i \in \{1,2\}$, et en rajoutant les contraintes liées.
Le programme linéaire s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2,y_{1,1},y_{1,2},y_{2,2}} \quad & -y_{1,1}^2 + 4y_{2,2}^2 + 12y_{1,2} + 11x_1 + 7x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & y_{1,1} \leq x_1 \\ & 2x_1 - y_{1,1} \leq 1 \\ & y_{1,2} \leq x_1 \\ & y_{1,2} \leq x_2 \\ & x_1 + x_2 - y_{1,2} \leq 1 \\ & y_{2,2} \leq x_2 \\ & 2x_1 - y_{2,2} \leq 1 \\ & x_1, x_2, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,2} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Question 2 (3 points)

On va réutiliser les notations vues en TD, à savoir :

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

On veut R telle que trace$(R\overline{X}) = -x_1^2 + 4x_2^2 + 12x_1x_2 + 11x_1 + 7x_2$. On trouve :

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 6 & \frac{11}{2} \\ 6 & 4 & \frac{7}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Pour la contrainte, c'est pareil, on cherche W telle que trace$(W\overline{X}) = x_1 + 2x_2$. On trouve :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notre programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(R\overline{X}) \\ \text{s.c.} \quad & \text{trace}(W\overline{X}) \leq 2 \\ & \overline{X} \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$

Question 3 (6 points)

La question consiste à transformer la contrainte trace$(W\overline{X}) \leq 2$, et à trouver la matrice W_i qui correspond.

Première reformulation (1 point)
On replace les x_i par x_i^2. La contrainte devient :

$$x_1^2 + 2x_2^2 \leq 2$$

On trouve alors la matrice W_1 :

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notre programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(R\overline{X}) \\ \text{s.c.} \quad & \text{trace}(W_1\overline{X}) \leq 2 \\ & \overline{X} \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$

Deuxième reformulation (1 point)
On élève au carré les deux membres de la contrainte. Elle devient donc :

$$(x_1 + 2x_2)^2 \leq 2^2$$

On développe pour obtenir :

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 \leq 4$$

On trouve alors la matrice W_2 :

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notre programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(R\overline{X}) \\ \text{s.c.} \quad & \text{trace}(W_2\overline{X}) \leq 2 \\ & \overline{X} \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$

Troisième reformulation (1 point)

On multiplie les deux côtés de la contrainte par $(x_1 + 2x_2)$, ce qui donne :

$$(x_1 + 2x_2)^2 \leq 2(x_1 + 2x_2)$$

Après développement, on obtient :

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \leq 0$$

On trouve alors la matrice W_3 :

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Notre programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(R\overline{X}) \\ \text{s.c.} \quad & \text{trace}(W_3\overline{X}) \leq 0 \\ & \overline{X} \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$

Quatrième reformulation (1 point)

On passe l'ensemble de la contrainte à droite pour obtenir $2 - (x_1 + 2x_2) \geq 0$, puis on l'élève au carré. Après développement, la contrainte s'écrit :

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 \geq -4$$

On trouve alors la matrice W_4 :

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Notre programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(R\overline{X}) \\ \text{s.c.} \quad & \text{trace}(W_4\overline{X}) \geq -4 \\ & \overline{X} \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$

L'écriture $(x_1 + 2x_2) - 2 \leq 0$ mis au carré est $((x_1 + 2x_2) - 2)^2 \geq 0$ en non pas ≤ 0. En effet, la solution $(x_1, x_2) = (1, 0)$ est une solution valide, car $1 * 1 + 2 * 0 \leq 2$. Si on utilise

$((x_1+2x_2)-2)^2 \leq 0$, on obtient $((1*1+2*0)-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 \leq 0$, ce qui est faux.

Cinquième reformulation (2 points)
On va multiplier la contrainte par $x_1, x_2, (1-x_1), (1-x_2)$, ce qui nous donnera quatre inéquations au lieu d'une. On obtient alors :

$$\begin{cases} (x_1+2x_2)x_1 \leq 2x_1 \\ (x_1+2x_2)(1-x_1) \leq 2(1-x_1) \\ (x_1+2x_2)x_2 \leq 2x_2 \\ (x_1+2x_2)(1-x_2) \leq 2(1-x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+2x_1x_2-2x_1 \leq 0 \\ x_1x_2+2x_2^2-2x_2 \leq 0 \\ -x_1^2-2x_1x_2+3x_1+2x_2 \leq 2 \\ -2x^2-x_1+x_1+4x_2 \leq 2 \end{cases}$$

D'où l'on déduit quatre matrices $W_{5a}, W_{5b}, W_{5c}, W_{5d}$

$$W_{5a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{5b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{5c} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{5d} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Notre programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(R\overline{X}) \\ \text{s.c.} \quad & \text{trace}(W_{5a}\overline{X}) \leq 0 \\ & \text{trace}(W_{5b}\overline{X}) \leq 0 \\ & \text{trace}(W_{5c}\overline{X}) \leq 2 \\ & \text{trace}(W_{5d}\overline{X}) \leq 2 \\ & \overline{X} \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$